

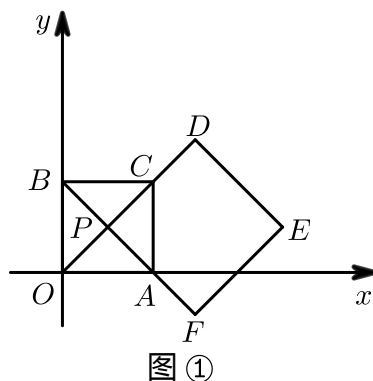
第3讲几何变换之旋转

一、单线段最值

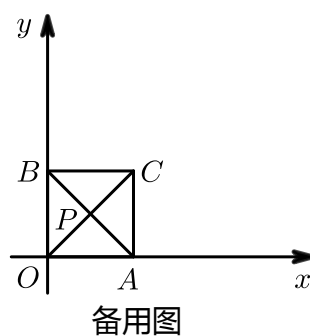
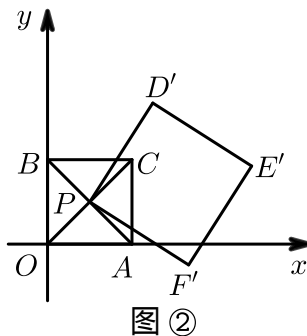
1. 找隐圆

典题精炼

1. 如图①，在平面直角坐标系中，四边形 $AOBC$ 是正方形，点 P 为正方形 $AOBC$ 对角线的交点，点 $O(0,0)$ ，点 $A(2,0)$ ，点 $B(0,2)$ ，分别延长 OC 到 D ， PA 到 F ，使 $PD = 2PC$ ， $PF = 2PA$ ，再以 PD ， PF 为邻边作平行四边形 $PDEF$ 。



- (1) 求点 D 的坐标。
- (2) 如图②，将四边形 $PDEF$ 绕点 P 逆时针旋转四边形 $PD'E'F'$ ，点 D ， E ， F 旋转后的对应点分别为 D' ， E' ， F' ，旋转角为 $\alpha (0^\circ < \alpha < 360^\circ)$ 。



- ① 在旋转过程中，当 $\angle PBD' = 90^\circ$ 时，求点 D' 的坐标。
- ② 在旋转过程中，求 BE' 的取值范围（直接写出结果即可）。

2. 在平面直角坐标系中， O 为坐标原点，点 $A(3,4)$ ，点 $B(6,0)$ 。

(1) 如图①，求 AB 的长。

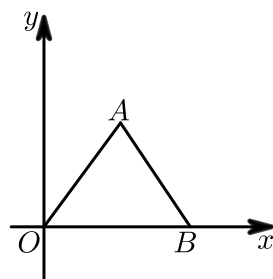


图 ①

(2) 如图②，把图①中的 $\triangle OAB$ 绕点 B 顺时针旋转，使点 O 的对应点 M 恰好落在 OA 延长线上， N 是点 A 旋转后的对应点。

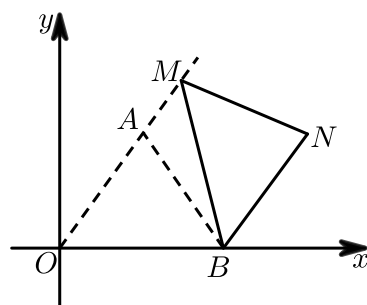


图 ②

① 求证： $BN \parallel OM$ 。

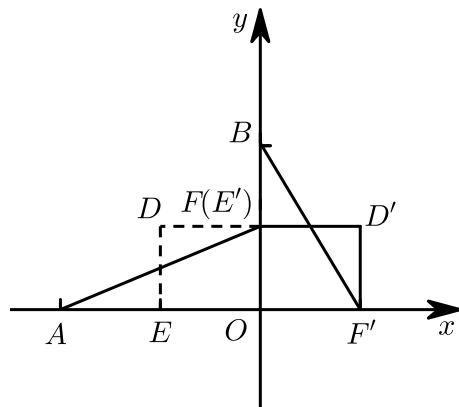
② 求点 N 的坐标。

(3) 点 C 是 OB 的中点，点 D 为线段 OA 上的动点，在 $\triangle OAB$ 绕点 B 顺时针旋转过程中，点 D 的对应点是 P ，求线段 CP 长的取值范围（直接写出结果）。

 经典再现

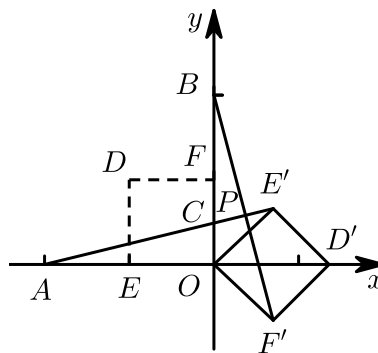
3. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(-2, 0)$ ，点 $B(0, 2)$ ，点 E ，点 F 分别为 OA ， OB 的中点．若正方形 $OEDF$ 绕点 O 顺时针旋转，得正方形 $OE'D'F'$ ，记旋转角为 α ．

(1) 如图①，当 $\alpha = 90^\circ$ ，求 AE' ， BF' 的长．



图①

(2) 如图②，当 $\alpha = 135^\circ$ ，求证 $AE' = BF'$ ，且 $AE' \perp BF'$ ．



图②

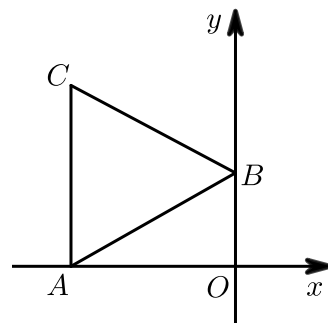
(3) 若直线 AE' 与直线 BF' 相交于点 P ，求点 P 的纵坐标的最大值（直接写出结果即可）．

2. 构造中位线

典题精炼

4. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(-3, 0)$ ，点 $B(0, \sqrt{3})$ 。以 AB 为一边作等边三角形 ABC ，点 C 在第二象限。

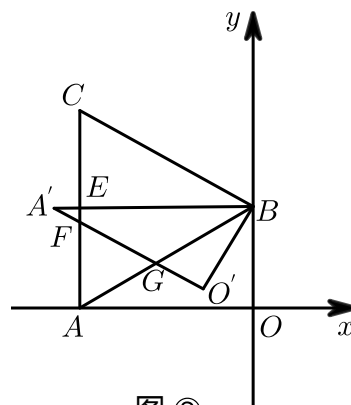
(1) 如图①，求点 C 的坐标。



图①

(2) 将 $\triangle AOB$ 绕点 B 顺时针旋转得 $\triangle A'O'B$ ，点 A 、 O 旋转后的对应点为 A' 、 O' 。

- ① 如图②，当旋转角为 30° 时， $A'B$ 、 $A'O'$ 与 AC 分别交于点 E 、 F 。 $A'O'$ 与 AB 交于点 G ，求 $\triangle A'O'B$ 与 $\triangle ABC$ 公共部分面积 S 的值。

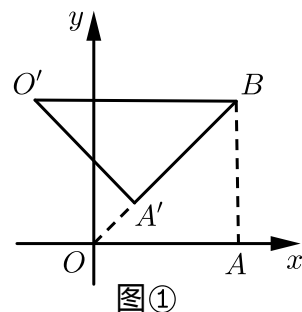


图②

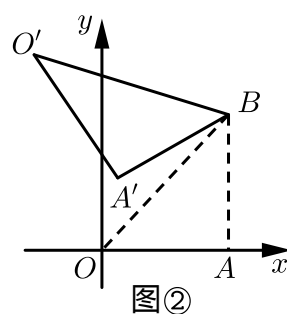
- ② 若 P 为线段 CO' 的中点，求 AP 长的取值范围（直接写出结果即可）。

5. 在平面直角坐标系中，点 $A(2,0)$ ，点 $B(2,2)$ ，将 $\triangle OAB$ 绕点 B 顺时针旋转，得 $\triangle O'A'B$ ，点 A ， O 旋转后的对应点为 A' ， O' ，记旋转角为 α 。

(1) 如图①，当 $\alpha = 45^\circ$ 时，求点 A' 的坐标。



(2) 如图②，当 $\alpha = 60^\circ$ 时，求点 A' 的坐标。



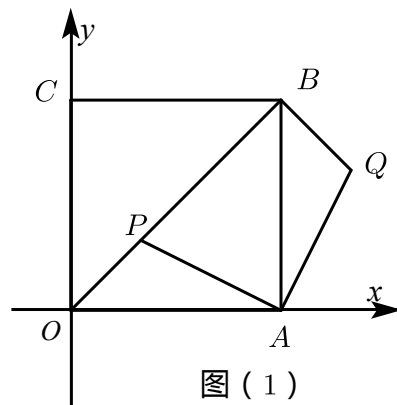
(3) 连接 OA' ，设线段 OA' 的中点为 M ，连接 $O'M$ 。求线段 $O'M$ 的长的最小值（直接写出结果即可）。

二、旋转与面积最值

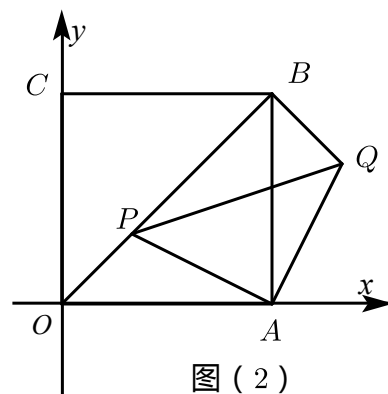
典题精炼1

6. 在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 是正方形， O 是原点，点 A 在 x 轴上，点 C 在 y 轴上，点 $B(6,6)$ ， P 是射线 OB 上一点，将 $\triangle AOP$ 绕点 A 顺时针旋转 90° ，得 $\triangle ABQ$ ， Q 是点 P 旋转后的对应点。

(1) 如图(1)当 $OP = 2\sqrt{2}$ 时，求点 Q 的坐标。



(2) 如图(2)，设点 $P(x,y)$ ($0 < x < 6$)， $\triangle APQ$ 的面积为 S 。求 S 与 x 的函数关系式，并写出当 S 取最小值时，点 P 的坐标。

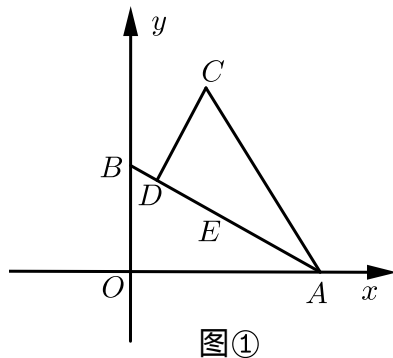


(3) 当 $BP + BQ = 8\sqrt{2}$ 时，求点 Q 的坐标 (直接写出结果即可)。

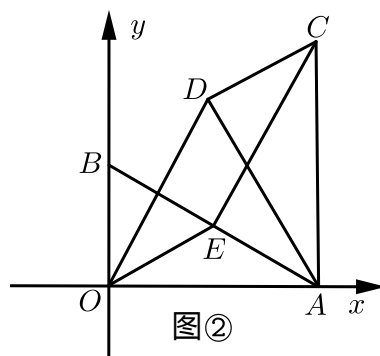
 典题精炼2

7. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(\sqrt{3}, 0)$ ，点 $B(0, 1)$ ，点 E 是边 AB 中点，把 $\triangle ABO$ 绕点 A 顺时针旋转，得 $\triangle ADC$ ，点 O, B 旋转后的对应点分别为 D, C ，记旋转角为 α 。

(1) 如图①，当点 D 恰好落在 AB 上时，求点 D 的坐标。



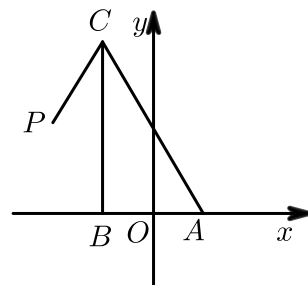
(2) 如图②，若 $\alpha = 60^\circ$ 时，求证：四边形 $OECD$ 是平行四边形。



(3) 连接 OC ，在旋转的过程中，求 $\triangle OEC$ 面积的最大值（直接写出结果即可）。

8. 在平面直角坐标系中， $\triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle CAB = 60^\circ$ ，点 $O(0,0)$ ，点 $A(1,0)$ ，点 $B(-1,0)$ ，点 C 在第二象限，点 $P(-2, \sqrt{3})$ 。

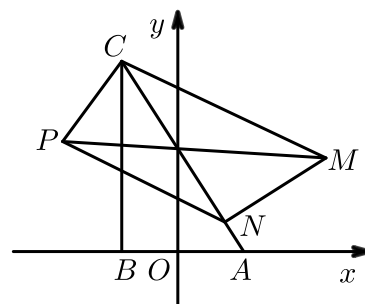
(1) 如图①，求 C 点坐标及 $\angle PCB$ 的大小。



图①

(2) 将 $\triangle ABC$ 绕 C 点逆时针旋转得到 $\triangle MNC$ ，点 A ， B 的对应点分别为点 M ， N ， S 为 $\triangle PMN$ 的面积。

① 如图②，当点 N 落在边 CA 上时，求 S 的值；

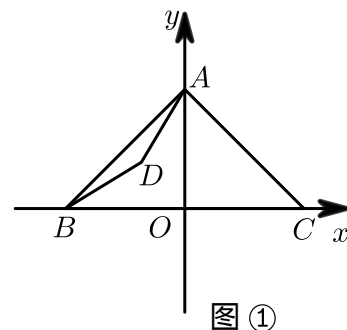


图②

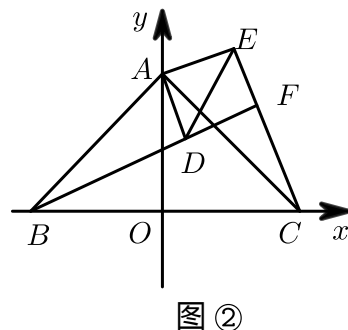
② 求 S 的取值范围（直接写出结果即可）。

9. 如图，在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(0,4)$ ， $B(-4,0)$ ， $C(4,0)$ 。

(1) 如图①，若 $\angle BAD = 15^\circ$ ， $AD = 3$ ，求点 D 的坐标。



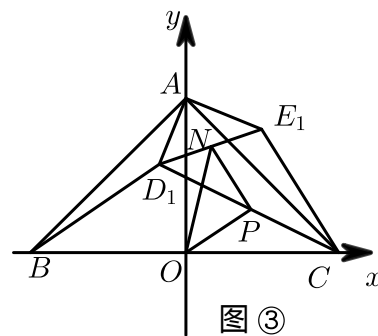
(2) 如图②， $AD = 2$ ，将 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针方向旋转得到 $\triangle ACE$ ，点 B ， D 的对应点分别为 C ， E 。连接 DE ， BD 的延长线与 CE 相交于点 F 。



① 求 DE 的长。

② 证明： $BF \perp CE$ 。

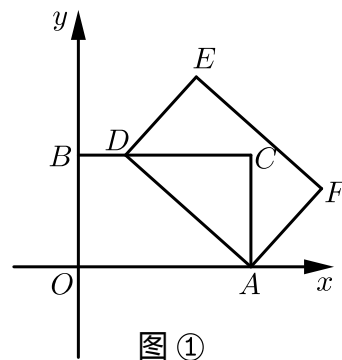
(3) 如图③，将(2)中的 $\triangle ADE$ 绕点 A 在平面内旋转一周，在旋转过程中点 D ， E 的对应点分别为 D_1 ， E_1 ，点 N ， P 分别为 D_1E_1 ， D_1C 的中点，请直接写出 $\triangle OPN$ 面积 S 的变化范围。



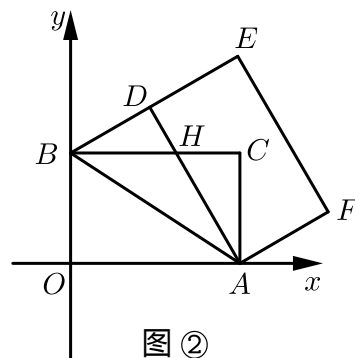
 经典再现

10. 在平面直角坐标系中，四边形 $AOBC$ 是矩形，点 $O(0,0)$ ，点 $A(5,0)$ ，点 $B(0,3)$ ，以点 A 为中心，顺时针旋转矩形 $AOBC$ ，得到矩形 $ADEF$ ，点 O, B, C 的对应点分别为 D, E, F 。

(1) 如图①，当点 D 落在 BC 边上时，求点 D 的坐标。



(2) 如图②，当点 D 落在线段 BE 上时， AD 与 BC 交于点 H 。



① 求证 $\triangle ADB \cong \triangle AOB$ 。

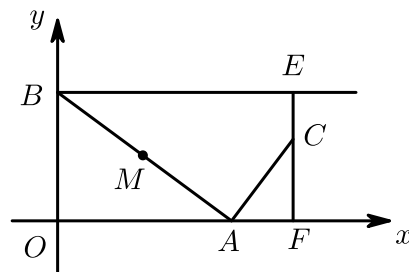
② 求点 H 的坐标。

(3) 记 K 为矩形 $AOBC$ 对角线的交点， S 为 $\triangle KDE$ 的面积，求 S 的取值范围（直接写出结果即可）。

三、 旋转与线段和差问题

典题精炼1

11. 如图，点 A 是 x 轴正半轴上的动点，点 B 坐标为 $(0, 4)$ ， M 是线段 AB 的中点，将点 M 绕点 A 顺时针方向旋 90° 得到点 C ，过点 C 作 x 轴的垂线，垂足为 F ，过点 B 作 y 轴的垂线与直线 CF 相交于点 E ，连接 AC ， BC ，设点 A 的横坐标为 t 。



- (1) 当 $t = 2$ 时，求点 M 的坐标。
- (2) 设 $\triangle BCE$ 的面积为 S ，当点 C 在线段 EF 上时，求 S 与 t 之间的函数关系式，并写出自变量 t 的取值范围。
- (3) 当 t 为何值时， $BC + CA$ 取得最小值。

 典题精炼2

12. 已知直线 AB 交 x 轴, y 轴于点 A , 点 B , 且 $A(6, 0)$, $\angle OAB = 30^\circ$.

(1) 如图1, 求点 B 的坐标.

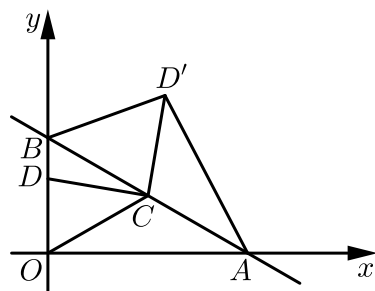


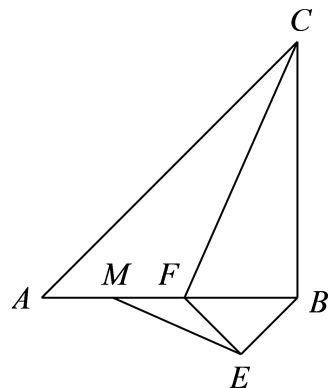
图 1

(2) 如图1, 若点 C 为线段 AB 上一动点, 点 D 为 y 轴上一动点, 连接 OC , CD , 当 $OC + \frac{1}{2}AC$ 取得最小值时, 求点 C 的坐标.

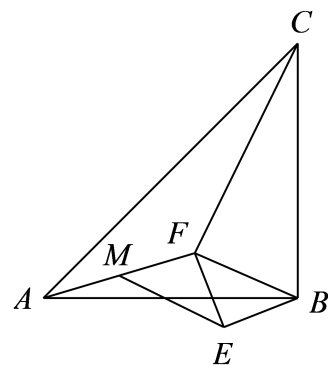
(3) 如图1, 将第(2)问中的线段 CD 绕点 C 顺时针旋转 90° 得线段 CD' , 连接 BD' , AD' , 求 $BD' + AD'$ 的最小值.

典题精炼3

13. 如图, $\triangle ABC$ 、 $\triangle BEF$ 为等腰直角三角形, $\angle ABC = \angle BEF = 90^\circ$, $BA = BC$, $EB = EF$, 连接 AF 、 CF , M 为 AF 的中点.



- (1) 当 A 、 F 、 B 共线时, 求证: $ME = \frac{1}{2}CF$.
- (2) 如图, 当 A 、 F 、 B 不共线时, 求证: $ME = \frac{1}{2}CF$.

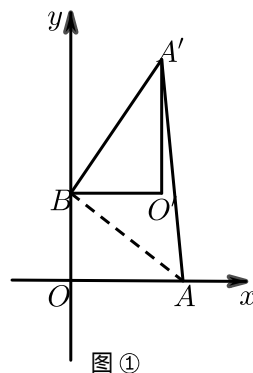


- (3) 设 $BC = 2$, 请直接写出 $BF + AF + CF$ 的最小值.

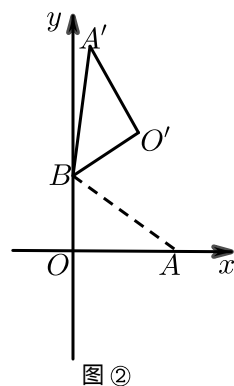
 经典再现

14. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(4,0)$ ，点 $B(0,3)$ ，把 $\triangle ABO$ 绕点 B 逆时针旋转，得 $\triangle A'BO'$ ，点 A, O 旋转后的对应点为 A', O' ．记旋转角为 α ．

(1) 如图①，若 $\alpha = 90^\circ$ ，求 AA' 的长．



(2) 如图②，若 $\alpha = 120^\circ$ ，求点 O' 的坐标．



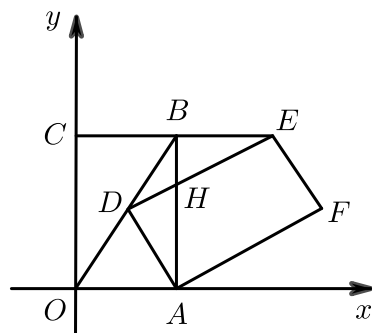
(3) 在(2)的条件下，边 OA 上的一点 P 旋转后的对应点为 P' ，当 $O'P + BP'$ 取得最小值时，求点 P' 的坐标．

四、 存在性问题

典题精炼1

15. 在平面直角坐标系中，四边形 $OACB$ 是矩形，点 $O(0,0)$ ，点 $A(3,0)$ ，点 $C(0,4)$ ，连接 OB ，以点 A 为中心，顺时针旋转矩形 $AOCB$ ，旋转角为 $\alpha(0^\circ < \alpha < 360^\circ)$ ，得到矩形 $ADEF$ ，点 O, C, B 的对应点分别为 D, E, F 。

(1) 如图，当点 D 落在对角线 OB 上时，求点 D 的坐标。



(2) 在(1)的情况下， AB 与 DE 交于点 H 。

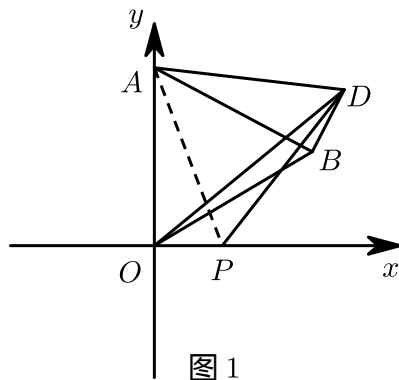
① 求证 $\triangle BDE \cong \triangle DBA$ 。

② 求点 H 的坐标。

(3) α 为何值时， $FB = FA$ 。(直接写出结果即可)。

典题精炼2

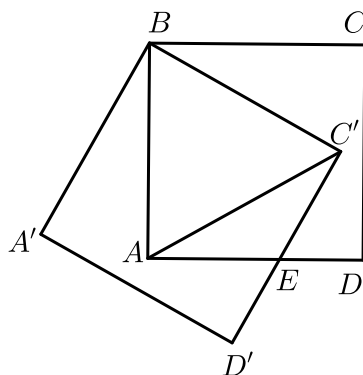
16. 如图1, 在平面直角坐标系中, 已知 $\triangle AOB$ 是等边三角形, 点 A 的坐标是 $(0, 4)$, 点 B 在第一象限, 点 $P(t, 0)$ 是 x 轴上的一个动点, 连接 AP , 并把 $\triangle AOP$ 绕着点 A 按逆时针方向旋转, 使边 AO 与 AB 重合, 得到 $\triangle ABD$.



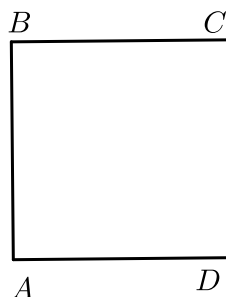
- (1) 当 $t = \sqrt{3}$ 时, 求 PD 的长.
- (2) 在点 P 运动过程中, 依照条件所形成的 $\triangle OPD$ 面积为 S .
- ① 求 $t > 0$ 时, 求 S 与 t 之间的函数关系式.
 - ② 当 $t \leq 0$ 时, 要使 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 请直接写出所有符合条件的点 P 的坐标.

 典题精炼3

17. 如图a, 将正方形 $ABCD$ 绕点 B 顺时针旋转 α ($0 < \alpha < 90^\circ$) 得到正方形 $A'BC'D'$, 连接 AC' 、 AD' .

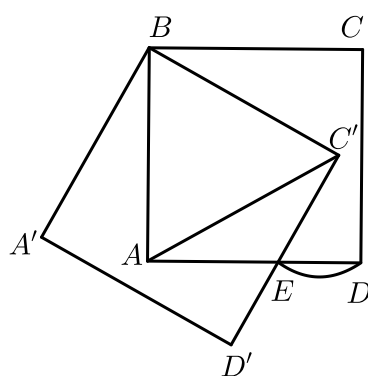


图a

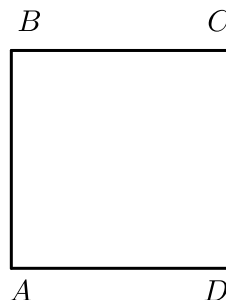


备用图1

- (1) 当 $\alpha = 20^\circ$ 时, $\angle AC'D' =$ _____ .
 (2) 如图b, 若正方形 $ABCD$ 的边长为4, 当 $\angle C'AD' = 90^\circ$ 时, 求 DE 的长.



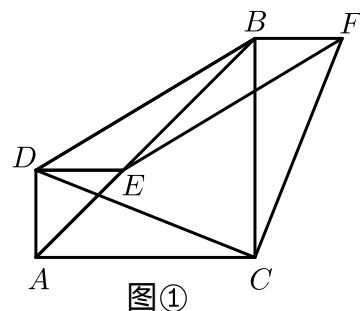
图b



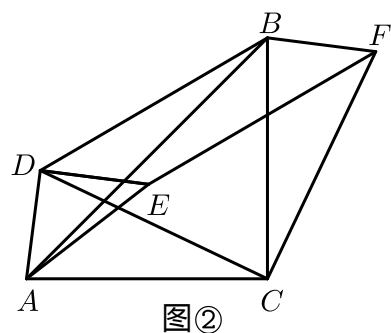
备用图2

- (3) 当旋转角 α 为多少时, $\triangle AD'C'$ 是等腰三角形.

18. 如图①, E 在 AB 上, $\triangle ACB$ 、 $\triangle ADE$ 都为等腰直角三角形, $\angle ADE = \angle ACB = 90^\circ$, 连接 DB , 以 DE 、 DB 为边作平行四边形 $DBFE$, 连接 FC 、 DC .



- (1) 请根据图①, 猜想线段 CD 、 CF 的数量关系与位置关系分别是: _____、_____.
- (2) 若将图①中 $\triangle ADE$ 绕 A 点顺时针旋转, 其它条件不变, 如图②, (1)的结论是否成立? 说明理由.



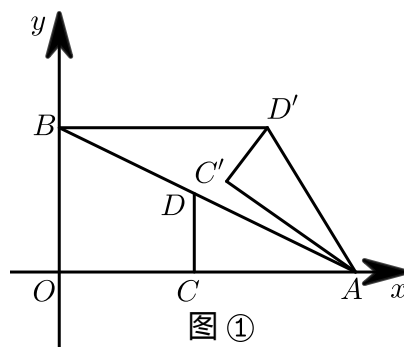
- (3) 将图①中的 $\triangle ADE$ 绕 A 点顺时针旋转 α° , $0 < \alpha \leq 360$, 其它条件不变, 当四边形 $DBFE$ 为矩形时, 直接写出 α 的值.

五、共线问题

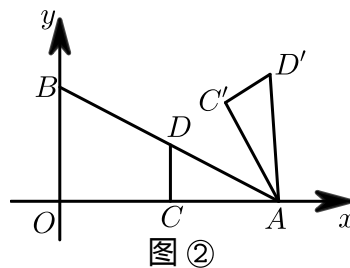
典题精炼

19. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(8,0)$ ，点 $B(0,4)$ ，点 C ， D 分别是边 OA ， AB 的中点．将 $\triangle ACD$ 绕点 A 顺时针方向旋转，得 $\triangle AC'D'$ ，记旋转角为 α ．

(1) 如图①，连接 BD' ，当 $BD' \parallel OA$ 时，求点 D' 的坐标．

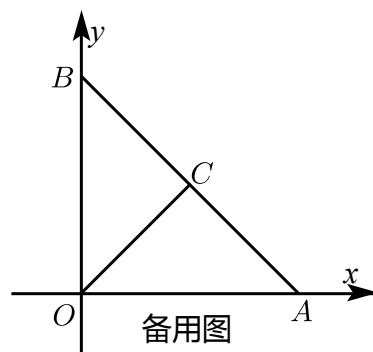


(2) 如图②，当 $\alpha = 60^\circ$ 时，求点 C' 的坐标．

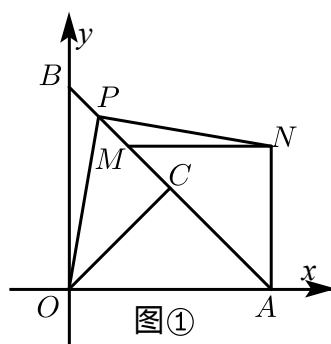


(3) 当点 B ， D' ， C' 共线时，求点 C' 的坐标（直接写出结果即可）．

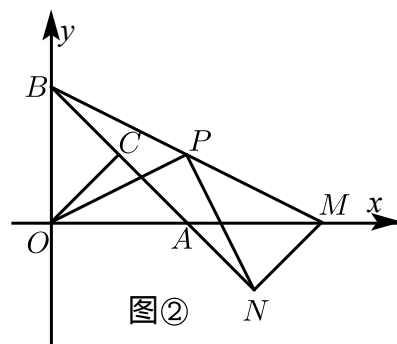
20. 在直角坐标系中， O 为坐标原点，点 $A(4,0)$ ，点 $B(0,4)$ ， C 是 AB 中点，连接 OC ，将 $\triangle AOC$ 绕点 A 顺时针旋转，得到 $\triangle AMN$ ，记旋转角为 α ，点 O ， C 的对应点分别是 M ， N ，连接 BM ， P 是 BM 中点，连接 OP ， PN 。



- (1) 如图①，当 $\alpha = 45^\circ$ 时，求点 M 的坐标。



- (2) 如图②，当 $\alpha = 180^\circ$ 时，求证 $OP = PN$ ，且 $OP \perp PN$ 。



- (3) 当 $\triangle AOC$ 旋转至点 B ， M ， N 共线时，求点 M 的坐标（直接写出结果即可）。